**Всероссийская олимпиада школьников по математике**

**Муниципальный этап 2019–2020 уч. г.**

**7 класс**

**7.1.** Младший брат доходит до школы за 25 минут, а старший брат по той же дороге – за 15 минут. Через сколько минут после выхода из дома младшего брата его догонит старший брат, если он вышел на 8 минут позже младшего?

**7.2.** Одну сторону прямоугольника (ширину) увеличили на 10%, а другую (длину) – на 20%. **а**) На сколько процентов площадь нового прямоугольника больше площади исходного? **б)** Найдите отношение сторон исходного прямоугольника, если известно, что периметр нового прямоугольника на 18% больше периметра исходного.

**7.3.** На плоскости провели 100 прямых. Могло ли число всех точек пересечения равняться **а)** 100? **б)** 99?

**7.4.** Пусть  обозначает сумму цифр натурального числа Существует ли такое *n,* что  ?

**7.5.** Петя говорит соседу Вове: «В нашем классе 30 человек и наблюдается интересная ситуация: у любых двух мальчиков разное число подруг в классе, и у любых двух девочек разное число друзей среди мальчиков класса. Сможешь ли ты определить, сколько у нас в классе мальчиков и сколько девочек?» Вова отвечает: «Ты, наверное, путаешь, не может быть такой ситуации!» **а**) Прав ли Вова? **б**) А как бы вы ответили на вопрос Пети?

**Всероссийская олимпиада школьников по математике**

**Муниципальный этап 2019–2020 уч. г.**

**8 класс**

**8.1.** Младший брат доходит до школы за 25 минут, а старший брат по той же дороге – за 15 минут. Через сколько минут после выхода из дома младшего брата его догонит старший брат, если он вышел на 8 минут позже младшего?

**8.2.** Одну сторону прямоугольника (ширину) увеличили на 10%, а другую (длину) – на 20%. а) Мог ли при этом периметр увеличиться больше, чем на 20%? **б)** Найдите отношение сторон исходного прямоугольника, если известно, что периметр нового прямоугольника на 18% больше периметра исходного.

**8.3.** В треугольнике *АВС* сторона *АС* – наибольшая. Точки *M* и *N* на стороне *АС* таковы, что *AM=AB* и *CN=CB*. Известно, что угол *NBM* в три раза меньше угла *АВС.* Найдите ∠*AВС.*

**8.4.** Петя говорит соседу Вове: «В нашем классе 30 человек и наблюдается интересная ситуация: у любых двух мальчиков разное число подруг в классе, и у любых двух девочек разное число друзей среди мальчиков класса. Сможешь ли ты определить, сколько у нас в классе мальчиков и сколько девочек?» Вова отвечает: «Ты, наверное, путаешь, не может быть такой ситуации!» **а**) Прав ли Вова? **б**) А как бы вы ответили на вопрос Пети?

**8.5.** 20 чисел: 1, 2, …, 20 разбили на две группы. Оказалось, что сумма чисел первой группы равна произведению чисел второй группы. **а)** Какоенаименьшее и **б)** какоенаибольшее количество чисел может быть во второй группе?

**Всероссийская олимпиада школьников по математике**

**Муниципальный этап 2019–2020 уч. г.**

**9 класс**

**9.1**. К восьмизначному числу 20192020 припишите слева и справа по цифре так, чтобы полученное 10-значное число делилось на 72.

**9.2.** Длины *a*, *b*, *c* сторон треугольника удовлетворяют неравенству . Докажите, что угол, лежащий против стороны *с*, острый.

**9.3**. График приведенного квадратного трехчлена (парабола) с целыми коэффициентами касается оси Ох. Докажите, что на этой параболе можно отметить такую точку с целыми координатами , что график  тоже касается оси Ох.

**9.4**. Дан треугольник со сторонами *a,b,c.*  На его сторонах как на диаметрах построили полукруги во внешнюю сторону и получили фигуру Ф, составленную из треугольника и трёх полукругов. Найдите диаметр Ф (диаметр множества на плоскости – это наибольшее расстояние между его точками).

**9.5.** 20 чисел: 1, 2, …, 20 разбили на две группы. Оказалось, что сумма чисел первой группы равна произведению чисел второй группы. Какое **а)** наименьшее и **б)** наибольшее количество чисел может быть во второй группе?

**Всероссийская олимпиада школьников по математике**

**Муниципальный этап 2019–2020 уч. г.**

**10 класс**

**10.1**. Числа *a*, *b*, *c* удовлетворяют неравенству . Докажите, что .

**10.2**. Дан прямоугольный треугольник *АВС* с катетами *АС* = *a* и *СВ* = *b*. Найдите **а)** сторону квадрата с вершиной *С* наибольшей площади, целиком лежащего в треугольнике *АВС*; **б)** размеры прямоугольника с вершиной *С* наибольшей площади, целиком лежащего в треугольнике *АВС*.

**10.3**. График приведенного квадратного трехчлена (парабола) с целыми коэффициентами касается оси Ох. Докажите, что на этой параболе можно отметить такую точку с целыми координатами , что график  тоже касается оси Ох.

**10.4.** Дан треугольник со сторонами *a,b,c.*  На его сторонах как на диаметрах построили полукруги во внешнюю сторону и получили фигуру Ф, составленную из треугольника и трёх полукругов. Найдите диаметр Ф (диаметр множества на плоскости – это наибольшее расстояние между его точками).

**10.5.** Сколько решений в целых числах *x,y* имеет уравнение ?

;

**Всероссийская олимпиада школьников по математике**

**Муниципальный этап 2019–2020 уч. г.**

**11 класс**

**11.1.** Решите уравнение .

**11.2**. Дан прямоугольный треугольник *АВС* с катетами *АС* = *a* и *СВ* = *b*. Найдите **а)** сторону квадрата с вершиной *С* наибольшей площади, целиком лежащего в треугольнике *АВС*; **б)** размеры прямоугольника с вершиной *С* наибольшей площади, целиком лежащего в треугольнике *АВС*.

**11.3.** Последовательность *an*задается соотношениями ; . Докажите, что  монотонно возрастает и  при всех *п*.

**11.4.** На координатной плоскости рассматривается семейство всех концентрических окружностей с центром в точке . Докажите, что существует окружность этого семейства, внутри которой (т.е. внутри круга) ровно 2019 точек с целыми координатами.

**11.5.** Сколько решений в целых числах *x,y* имеет уравнение ?